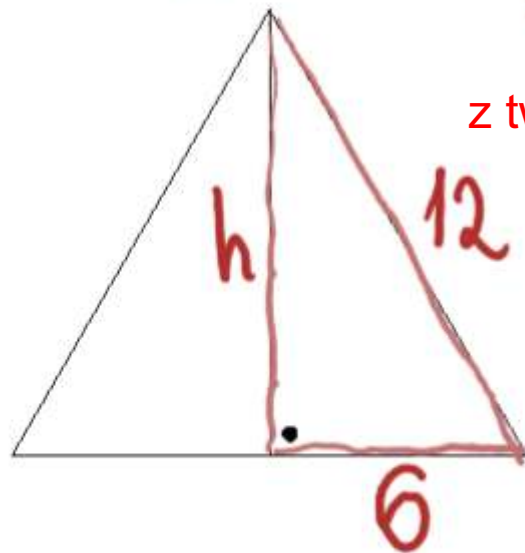


Wysokość w trójkącie równobocznym

Mamy trójkąt równoboczny o boku 12 cm i chcemy obliczyć wysokość:



z tw. Pitagorasa

$$\begin{aligned}6^2 + h^2 &= 12^2 \\36 + h^2 &= 144 \\h^2 &= 144 - 36 \\h^2 &= 108 \\h &= \sqrt{108}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}12 \\ \cdot 12 \\ \hline 24 \\ + 12 \\ \hline 144\end{array}$$

$$\text{ale: } \sqrt{108} = \sqrt{4 \cdot 27} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{27} = 2\sqrt{27}$$

$$\text{ale: } 2\sqrt{27} = 2 \cdot \sqrt{9 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

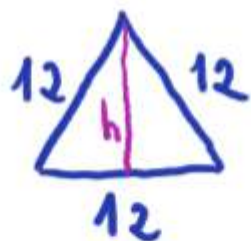
$$\text{Odp.: } h = 6\sqrt{3}$$

Otoż jest „GOTOWY” wzór
na wysokość trójkąta równobocznego:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

a - bok trójkąta
(równobocznego)

Jak „to działa”?

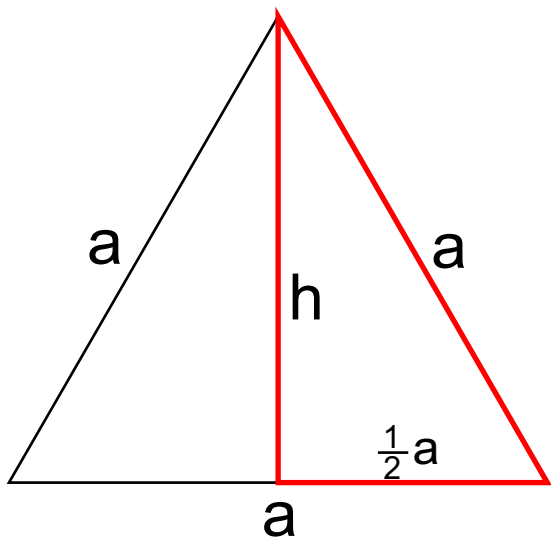


$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 6\sqrt{3}$$

(zobacz poprzednią kartkę i porównaj!)

Jak powstał ten wzór? - zobacz poniżej



równanie z tw. Pitagorasa
dla czerwonego trójkąta

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \sqrt{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

⑦



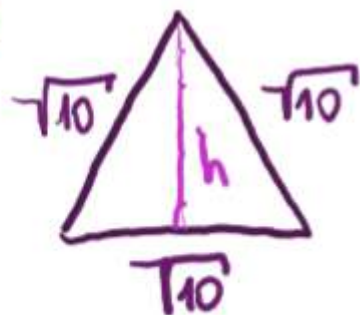
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{20\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{h = 10\sqrt{3}}$$

Przykłady wykorzystania tego wzoru

⑧



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{10 \cdot 3}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

⑨

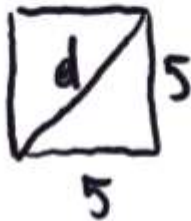


$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \sqrt{3 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$$

Przekątna w kwadracie

Zobaczcie obliczenie długości przekątnej kwadratu dla dwóch różnych kwadratów:

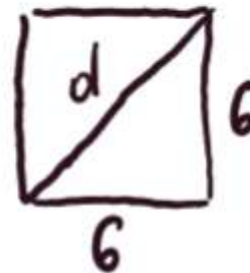


$$5^2 + 5^2 = d^2$$
$$25 + 25 = d^2$$

$$50 = d^2$$

$$d^2 = 50$$

$$d = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$



$$6^2 + 6^2 = d^2$$

$$36 + 36 = d^2$$

$$72 = d^2$$

$$d^2 = 72$$

$$d = \sqrt{72} =$$

$$= \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Widzisz to!

„Gotowy wzór na d kwadratu:

$$d = a\sqrt{2}$$

a - bok kwadratu

Jak powstał wzór na długość przekątnej w kwadracie?

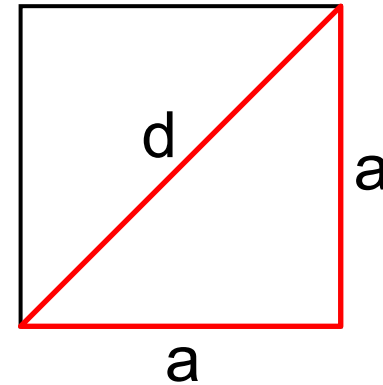
równanie z tw. Pitagorasa dla czerwonego trójkąta

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d^2 = 2a^2$$

$$d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \sqrt{a^2} = \sqrt{2} a \quad \text{lub} \quad a\sqrt{2}$$

$$d = a\sqrt{2}$$



Przykłady wykorzystania tego wzoru

$$\textcircled{P} \quad a=10 \quad d=10\sqrt{2}$$

$$\textcircled{P} \quad a=\sqrt{7} \quad d=\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{7 \cdot 2} = \sqrt{14}$$

$$\textcircled{P} \quad a=\sqrt{8} \quad d=\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\textcircled{P} \quad a=7\sqrt{2} \quad d=7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 7 \cdot \sqrt{2 \cdot 2} = 7\sqrt{4} = 7 \cdot 2 = 14$$

$$\textcircled{P} \quad a=3\sqrt{20} \quad d=3\sqrt{20} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{40} = 3\sqrt{4 \cdot 10} = 3\sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

Pole każdego trójkąta możemy obliczyć tak:



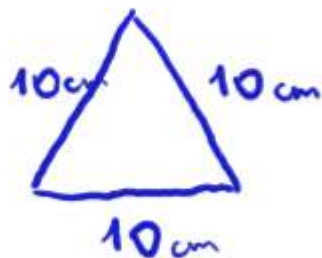
$$P = \frac{ah}{2}$$

Ale trójkąt równoboczny ma „dodatkowo” swój wzór:



$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

⑦



$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\overset{25}{\cancel{100}} \sqrt{3}}{\cancel{4}} = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

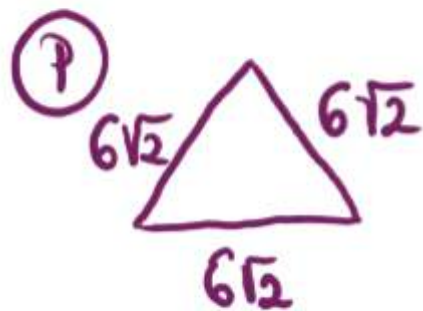
Przykłady wykorzystania tego wzoru



$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$
$$P = \frac{\sqrt{3}^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

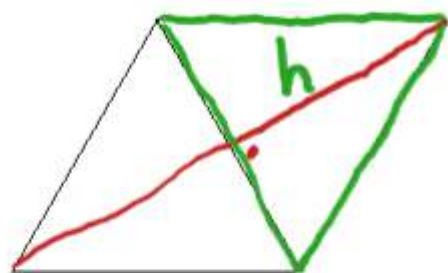


$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{8}^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{8}^2 \sqrt{3}}{\cancel{4}} = 2\sqrt{3}$$



$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(6\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{36}^9 \cdot 2\sqrt{3}}{\cancel{4}} = 18\sqrt{3}$$

Złączono bokami dwa trójkąty równoboczne, każdy o boku długości 10 cm.



Oblicz długość dłuższej przekątnej powstałego rombu

Na rysunku dłuższa przekątne (kolor czerwony)

Półowa dłuższej przekątnej to wysokość jednego z trójkątów równobocznych (kolor zielony)

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Dłuższa przekątna to dwie takie wysokości:

$$d_2 = 2h$$

$$d_2 = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$